RICERCA OPERATIVA **GRUPPO A**

prova scritta del 19 settembre 2006

Cognome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Nome: |__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

Matricola: |__|__|__|__|__|__|

Rispondere alla seguente domanda. La risposta viene valutata fino a 4 punti.

1. A un matrimonio

A un pranzo di nozze si vogliono accomodare 128 invitati in tavoli da 8 posti ciascuno in modo che

a) uomini e donne siedano in posti alternati

b) ciascuno abbia come vicini di tavolo due persone di proprio gradimento

Per rispettare la condizione (*b*) gli sposi hanno in mente di disegnare un certo grafo $G = (V, E)$ nel quale gli ospiti sono rappresentati da nodi, ed esiste un arco tra due nodi se e solo se gli ospiti corrispondenti hanno piacere a stare insieme. Che proprietà ha il grafo G? Quello descritto è chiaramente un problema combinatorio: qual è l'insieme universo e che forma ha la famiglia $\Im$ delle sue soluzioni ammissibili? (Nella risposta alle ultime due domande, per ogni $X \subseteq V$ si indichi con $E(X)$ l'insieme degli archi che hanno entrambi gli estremi in X).

G è un grafo ____________ bipartito ____________

L'insieme universo è $U = \{X \in 2^V: X \subseteq V, |X| = 8, (X, E(X))$ è hamiltoniano$\}$

La famiglia delle soluzioni ammissibili è $\Im = \{\Pi = \{X_1, \ldots, X_{16}\} \in 2^U: X_i \cap X_j = \varnothing$ per $i \neq j, \cup_i X_i = V\}$

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate).
Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta sbagliata vale –1 punto.

2. Il vettore (37/8, -2/5, -7/2) è combinazione
[A] affine
[B] conica
[C] convessa
dei vettori (3, 2/5, -4), (-1/2, 0, -3/2) e (5, -2, -1).

3. Indicare le corrette coppie primale-duale

Primale	1) $\max 5x_1 + 5x_2 - x_3$ $2x_1 + 2x_3 = 2$ $-x_1 + 3x_2 \le 3$ $-2x_1 + 5x_3 \ge 2$ $x_2 \ge 0$	2) $\max 5x_1 + 5x_2 - x_3$ $2x_1 + 2x_3 = 2$ $-x_1 + 3x_2 \le 3$ $-2x_1 + 5x_3 \ge 2$ $x_1 \ge 0$	3) $\max 5x_1 + 5x_2 - x_3$ $2x_1 + 2x_3 = 2$ $-x_1 + 3x_2 \le 3$ $-2x_1 + 5x_3 \ge 2$ $x_3 \ge 0$
Duale	A) $\max -3y_1 + 2y_2 + y_3$ $-y_1 + 2y_2 - y_3 = 5$ $3y_1 = 5$ $-5y_2 - y_3 \ge -1$ $y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$	B) $\max -3y_1 + 2y_2 - y_3$ $-y_1 + 2y_2 + y_3 = 5$ $3y_1 \ge 5$ $-5y_2 + y_3 = -1$ $y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$	C) $\max -3y_1 + 2y_2 - 4y_3$ $-y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 5$ $3y_1 = 5$ $-5y_2 + 4y_3 = -1$ $y_1 \ge 0$ $y_2 \ge 0$

Le corrette coppie primale/duale sono (1, B) (2, C) (3, A)

Risolvere i seguenti esercizi. Ogni soluzione viene valutata fino a 7 punti.

4. Con trasporto

Picchio è un autotrasportatore e ha un camion della portata di Q = 80 quintali con il quale effettua ogni giorno un certo giro di consegne. La tariffa del trasporto è un tanto al collo trasportato, più una quota fissa che viene applicata solo se il cliente viene visitato (indipendentemente dalla quantità di merce consegnata): sia q_i (sia c_i) la quota fissa applicata al (la tariffa per ogni collo consegnato al) cliente i, e, ipotizzando che ciascun cliente richieda il trasporto di colli identici, siano n_i il numero di colli richiesti dal cliente i, e p_i il peso in kg di ciascuno di essi ($i = 1, \ldots, m$). Le merci da consegnare vengono ritirate la mattina in un magazzino e di lì portate ai clienti. Per fortuna (di Picchio) le richieste non mancano, tanto che si trova di norma costretto a consegnare ad alcuni clienti quantità inferiori alla richiesta in quanto la merce raccolta nel magazzino eccede la portata del camion. Formulare come programmazione lineare intera il problema di determinare le quantità di merce da consegnare in un giorno massimizzando il ricavo.

Sia x_i una variabile binaria a valori in $\{0, 1\}$ che vale 1 se e solo se il cliente i fa parte del giro di consegne. Sia inoltre $y_i \in \{0, 1, \ldots, n_i\}$ una variabile intera non negativa il cui valore indica il numero di colli effettivamente consegnati al cliente i. Evidentemente

$$p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_my_m \leq Q \qquad \text{(vincolo di portata del camion)}$$

$$x_i \leq y_i \leq n_ix_i \qquad \text{per ogni cliente } i$$

Il secondo vincolo fa sì che la consegna i non viene effettuata ($x_i = 0$), se e solo se la quantità di colli consegnati al cliente i è $y_i = 0$. L'obiettivo consiste nel massimizzare il ricavo totale del giro di consegne:

$$\max \quad q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots q_mx_m + c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_my_m$$

5. L'era dell'euro

L'entrata in vigore dell'euro ha costretto gli italiani, abituati alla cartamoneta, a rivedere il proprio guardaroba eliminando jeans dalle tasche strette. L'euro è in effetti disponibile in otto tipi di conio metallico: da 1, 2, 5, 10, 20, 50 centesimi, e da 1 e 2 euro. Sia p_i il peso in grammi dell'i-esimo tipo di conio e supponiamo di voler determinare l'equivalente di Q euro in monete metalliche per un peso totale minimo. Formulare il problema come programmazione lineare intera.

Sia $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ una variabile intera non negativa il cui valore indica il numero di monete di conio i prescelte. Deve aversi

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 50x_6 + 100x_7 + 200x_8 = 100Q$$

L'obiettivo consiste nel minimizzare il peso totale delle monete utilizzate:

$$\min \quad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5 + p_6x_6 + p_7x_7 + p_8x_8$$

6. Equilibrio precario

Una sfera soggetta a gravità si trova nella regione di $\mathbb{R}^3$ delimitata dai semispazi chiusi

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq p \\ px_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 4 \end{aligned}$$

con la forza di gravità diretta secondo l'asse x_3 nel verso delle coordinate negative. Risolvendo il duale di un opportuno problema di programmazione lineare, stabilire un valore del parametro p che consenta alla sfera di mantenere una posizione stabile. Se tale valore effettivamente esiste, calcolare la quota x_3^* alla quale la sfera si mantiene in equilibrio.

La sfera ammette una posizione stabile se e solo se il problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq p \\ & px_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4 \end{aligned}$$

ammette ottimo finito. Poiché per valori finiti di p la regione ammissibile è senz'altro non vuota, il duale di questo problema

$$\begin{array}{lrcl} \max & py_1 + 4y_2 & & \\ & 2y_1 + py_2 & = & 0 \\ & y_1 - y_2 & = & 0 \\ & 3y_1 + 3y_2 & = & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

ha a sua volta ottimo finito (nel qual caso esiste una posizione stabile per la sfera) oppure non ammette soluzione (e in questo caso la posizione stabile non esiste in quanto il primale è illimitato). Perché il problema duale ammetta soluzione è necessario che una equazione, ad esempio la prima, sia ottenibile come combinazione lineare delle altre due; devono quindi esistere due coefficienti reali λ_1, λ_2 tali che

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ p & = & -\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 0 & = & \lambda_2 \end{array}$$

vale a dire $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $p = -2$. Il problema si riscrive allora

$$\begin{array}{lrcl} \max & -2y_1 + 4y_2 & & \\ & y_1 - y_2 & = & 0 \\ & 3y_1 + 3y_2 & = & 1 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

e ammette l'unica soluzione (ovviamente ottima) $y_1 = y_2 = {}^1/_6$ di valore ${}^1/_3$. Siccome all'ottimo il valore delle funzioni obiettivo primale e duale coincidono, la quota di equilibrio è pari a $x_3^* = {}^1/_3$.

7. Applicando il metodo di Fourier-Motzkin, risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare, esibendo il valore della soluzione ottima, qualora esista, altrimenti classificando il problema come inammissibile o illimitato.

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_2 + 7x_3 \\ & 6x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
0	-2	-7	1	0
6	-1	2	0	7
3	0	1	0	3
-1	0	0	0	0
0	0	-1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
3	0	1	0	3
-1	0	0	0	0
0	0	-1	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
3	0	0	0	3
-1	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	z	$\leq$
0	0	0	0	3

Il sistema è compatibile qualsiasi valori si assegni alla variabile z: pertanto il problema è illimitato.